SOLUCIONES DEL EXAMEN FINAL
PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I. JUNIO 2012

1. La probabilidad de que cada componente funcione es $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E) = P(F) = P(G) = P(H) = 0.9$. Denotemos por L_1 al subsistema $A \cap B \cap C$ y L_2 al subsistema $S_1 \cap F \cap S_2$, donde $S_1 = D \cup E$ y $S_2 = G \cup H$. Así, la probabilidad de que el sistema funcione es

$$P(S) = P(L_1 \cup L_2) = P(L_1) + P(L_2) - P(L_1 \cap L_2) = P(L_1) + P(L_2) - P(L_1)P(L_2)$$

donde:

$$\begin{aligned}
P(L_1) &= P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0.9^3 = 0.729 \\
P(S_1) &= P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) = P(D) + P(E) - P(D)P(E) = \\
&= 2 \cdot 0.9 - 0.9^2 = 0.99 \\
P(S_2) &= P(G \cup H) = 0.99 \\
P(L_2) &= P(S_1 \cap F \cap S_2) = P(S_1)P(F)P(S_2) = 0.99 \cdot 0.9 \cdot 0.99 = 0.88209
\end{aligned}$$

Con lo que la probabilidad pedida es

$$P(S) = 0.729 + 0.88209 - 0.729 \cdot 0.88209 = 0.96804639$$

2. Llamaremos A, B y C a los sucesos de comprar el móvil A, B y C respectivamente. El enunciado nos da sus probabilidades de ocurrencia:

$$P(A) = 0.25, P(B) = 0.3, P(C) = 0.45$$

Llamaremos **T** a la variable aleatoria **tiempo que dura la batería en horas**. El enunciado nos dice la distribución que sigue T para cada modelo de móvil:

$$\begin{aligned}
T|A &\sim N(22, 5 \\
T|B &\sim N(21, 4) \\
T|C &\sim N(20, 5)
\end{aligned}$$

a) Nos piden la probabilidad de que el móvil que me compre dure por lo menos 20 horas, es decir, $P(T > 20)$. Aplicando probabilidad total tenemos que:

$$P(T > 20) = P(T > 20|A)P(A) + P(T > 20|B)P(B) + P(T > 20|C)P(C)$$

Vamos a calcular las probabilidades que necesitamos (como son probabilidades asociadas a variables aleatorias que siguen distribuciones normales, primero tipificaremos y luego miraremos el valor correspondiente en la tabla de la normal $Z \sim N(0,1)$, que contiene los valores de $P(Z < z)$):

$$\begin{aligned}
P(T > 20|A) &= P(Z > \frac{20-22}{5}) = P(Z > -0.4) = P(Z < 0.4) = 0.6554 \\
P(T > 20|B) &= P(Z > \frac{20-21}{4}) = P(Z > -0.25) = P(Z < 0.25) = 0.6554 \\
P(T > 20|C) &= P(Z > \frac{20-20}{5}) = P(Z > 0) = 0.5
\end{aligned}$$

Así, sustituyendo, tenemos que:

$$P(T > 20) = 0.6554 \cdot 0.25 + 0.5987 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.45 = 0.56846$$

b) Ahora nos piden la probabilidad de que me haya comprado el móvil B sabiendo que la batería me dura menos de 20 horas, es decir, $P(B|T < 20)$. Para calcularla, aplicaremos el Teorema de Bayes, además teniendo en cuenta que $P(T < 20) = 1 - P(T > 20)$ para reutilizar los cálculos del apartado anterior, de manera que:

$$P(B|T < 20) = \frac{P(T < 20|B)P(B)}{P(T < 20)} = \frac{(1 - P(T > 20|B))P(B)}{1 - P(T > 20)} = \frac{0.4013 \cdot 0.3}{0.43154} = 0.27897$$

3. *a*) Se pide calcular un IC al 95 % de confianza para la varianza σ^2. La variable pivote que se debe utilizar es:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Pivotando, se obtiene que el intervalo es:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}, \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \right)$$

Realizamos algunos cálculos, obteniendo:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 67, \quad \bar{x} = 8.375, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 565.76$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}{n-1} = \frac{565.76 - 8 \cdot (8.375)^2}{7} = 0.662$$

Como $1 - \alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$ y $\alpha/2 = 0.025$, buscamos en la tabla correspondiente los percentiles que se necesitan:

$$\chi^2_{7,0.025} = 16.013 \qquad \chi^2_{7,0.975} = 1.69$$

Sustituyendo, el IC al 95 % es:

$$(0.28938, \quad 2.742)$$

b) Ahora debemos resolver el contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 & : & \sigma^2 & = & 1 \\ H_1 & : & \sigma^2 & \neq & 1 \end{cases}$$

La medida de discrepancia es

$$d = \frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1} \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

Con lo que medida de discrepancia observada es

$$\hat{d} = \frac{7 \times 0.662}{1} = 4.634$$

y sabemos que si H_0 es cierta, $d \sim \chi^2_7$.
La región crítica o de rechazo es $(0, 1.69) \cup (16.013, \infty)$, y la de no rechazo $(1.69, 16.013)$. Como $\hat{d} = 4.634 \in (1.69,\ 16.013)$, no existe evidencia para rechazar H_0 con $\alpha = 0.05$, es decir, no podemos rechazar que la varianza sea 1.